חלק 1 מספרים, פונקציות, חוקיות ואלגברה

1.1 תרגילי שברים שמוניהם 1

בכל התרגילים בפעילות זו הסכום של שני שברים **שונים** שווה לשבר שלישי. המונה של כל אחד משלושת השברים הוא 1, וכל המכנים הם מספרים **שלמים וחיוביים**.

א. השלימו את המכנים בתרגילים האלה:

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{\quad}$$
$$\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{\quad}$$
$$\frac{1}{4}=\frac{1}{5}+\frac{1}{\quad}$$
$$\frac{1}{5}=\frac{1}{6}+\frac{1}{\quad}$$
$$\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{\quad}$$

ב. נוסף על התרגיל

$$\frac{1}{4}=\frac{1}{5}+\frac{1}{20}$$

יש תרגיל שגם תוצאתו היא רבע. גלו את התרגיל:

$$\frac{1}{4}=\frac{1}{\quad}+\frac{1}{\quad}$$

ג. מצאו ארבעה תרגילים שונים (הסדר של שני השברים באגף הימני אינו משפיע):

$$\frac{1}{6}=\frac{1}{\quad}+\frac{1}{\quad}$$
$$\frac{1}{6}=\frac{1}{\quad}+\frac{1}{\quad}$$
$$\frac{1}{6}=\frac{1}{\quad}+\frac{1}{\quad}$$
$$\frac{1}{6}=\frac{1}{\quad}+\frac{1}{\quad}$$

© כיף עם ג'ף

ד. ג'ף כותב את הפתרונות לתרגיל הקודם בצורה משונה: כל מכנה בצד ימין הוא סכום של שני מספרים, ואחד משני המספרים הוא 6 בכל המכנים. דוגמה:

$$\frac{1}{6}=\frac{1}{6+1}+\frac{1}{6+36}$$
$$\frac{1}{6}=\frac{1}{6+2}+\frac{1}{6+18}$$
$$\frac{1}{6}=\frac{1}{6+3}+\frac{1}{6+12}$$
$$\frac{1}{6}=\frac{1}{6+4}+\frac{1}{6+9}$$

גלו בכל התרגילים את הקשר של מכפלת שני המספרים שמוסיפים ל-6. למשל בתרגיל הראשון המכפלה היא $1\cdot36$, ובתרגיל השני המכפלה היא $2\cdot18$.

ה. גלו את כל הזוגות של מספרים שלמים, חיוביים ושונים זה מזה ואשר מכפלתם היא 100.

ו. בעזרת הסעיף הקודם השלימו את התרגילים האלה שתוצאתם היא $\frac{1}{10}$. כל מכנה בצד ימין הוא סכום של שני מספרים, ואחד משני המספרים הוא 10 בכל המכנים. התרגיל הראשון כבר פתור.

$$\frac{1}{10}=\frac{1}{10+1}+\frac{1}{10+100}=\frac{1}{11}+\frac{1}{110}$$
$$\frac{1}{10}=\frac{1}{10+}+\frac{1}{10+}=\frac{1}{}+\frac{1}{}$$
$$\frac{1}{10}=\frac{1}{10+}+\frac{1}{10+}=\frac{1}{}+\frac{1}{}$$
$$\frac{1}{10}=\frac{1}{10+}+\frac{1}{10+}=\frac{1}{}+\frac{1}{}$$

© כיף עם ג'ף

ז. גלו את שלושת התרגילים שתוצאתם היא $\frac{1}{8}$. כל מכנה בצד ימין הוא סכום של שני מספרים, ואחד משני המספרים הוא 8 בכל המכנים.

$$\frac{1}{8}=\frac{1}{8+}+\frac{1}{8+}=\frac{1}{\quad}+\frac{1}{\quad}$$
$$\frac{1}{8}=\frac{1}{8+}+\frac{1}{8+}=\frac{1}{\quad}+\frac{1}{\quad}$$
$$\frac{1}{8}=\frac{1}{8+}+\frac{1}{8+}=\frac{1}{\quad}+\frac{1}{\quad}$$

ח. גלו את שבעת התרגילים שתוצאתם היא $\frac{1}{12}$. כל מכנה בצד ימין הוא סכום של שני מספרים, ואחד משני המספרים הוא 12 בכל המכנים.

$$\frac{1}{12}=\frac{1}{12+}+\frac{1}{12+}=\frac{1}{\quad}+\frac{1}{\quad}$$
$$\frac{1}{12}=\frac{1}{12+}+\frac{1}{12+}=\frac{1}{\quad}+\frac{1}{\quad}$$
$$\frac{1}{12}=\frac{1}{12+}+\frac{1}{12+}=\frac{1}{\quad}+\frac{1}{\quad}$$
$$\frac{1}{12}=\frac{1}{12+}+\frac{1}{12+}=\frac{1}{\quad}+\frac{1}{\quad}$$
$$\frac{1}{12}=\frac{1}{12+}+\frac{1}{12+}=\frac{1}{\quad}+\frac{1}{\quad}$$
$$\frac{1}{12}=\frac{1}{12+}+\frac{1}{12+}=\frac{1}{\quad}+\frac{1}{\quad}$$
$$\frac{1}{12}=\frac{1}{12+}+\frac{1}{12+}=\frac{1}{\quad}+\frac{1}{\quad}$$

ט. נתון: $\frac{1}{x}=\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+b}$

הוכיחו: $ab = x^2$

י. גלו נוסחה למספר התרגילים שאפשר ליצור בצורה זו:

© כיף עם ג'ף

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$$

כאשר

$x = c^y \cdot d^z$

וכאשר c ו-d הם מספרים ראשוניים.

יא. גלו כמה תרגילים שונים אפשר ליצור ושבהם $\frac{1}{18}$ שווה לסכום של שני שברים.

יב. גלו שבר מהצורה $\frac{1}{x}$ שיש לו בדיוק 10 תרגילים שונים מהצורה הזאת:

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$$

© כיף עם ג'ף

© כיף עם ג'ף