המתמטיקה שמאחורי תוצאות הבחירות לכנסת בשנת 2022 (חלק א')

בפעילות זו נלמד כיצד משתמשים בתוצאות הבחירות לכנסת ישראל כדי לחשב את חלוקת 120 המנדטים בין המפלגות. מטרת הפעילות היא להבין את המתמטיקה שמאחורי חלוקת המנדטים, ולא לדון בשאלה איזו מפלגה עדיפה.

בכנסת ישראל מכהנים 120 חברי כנסת. כל מנדט מייצג מושב אחד בכנסת.

נשתמש כדוגמה בתוצאות הבחירות לכנסת ה־25, שנערכו בשנת 2022.

בטבלה מספר 1, בעמודה A, מופיעות עשר המפלגות שעברו את אחוז החסימה. בעמודה B מופיע מספר הקולות שקיבלה כל מפלגה.

אחוז החסימה

כדי שמפלגה תהיה מיוצגת בכנסת, עליה לקבל מספר קולות מינימלי. מספר זה נקבע לפי אחוז החסימה.

מאז שנת 2014 עומד אחוז החסימה על 3.25% מכלל הקולות הכשרים בבחירות. מספר הקולות הכשרים מופיע מתחת לטבלה מספר 1.

1. כמה קולות לפחות צריכה מפלגה לקבל כדי לעבור את אחוז החסימה?

2. בסעיף 1 קיבל ג'ף את המספר 154,854.115. האם עליו לעגל את המספר כלפי מעלה או כלפי מטה? הסבירו מדוע מפלגה צריכה לקבל לפחות 154,855 קולות ולא 154,854 קולות.

בבחירות בשנת 2022 ניתנו 417,400 קולות לרשימות שלא עברו את אחוז החסימה. קולות אלה אינם משתתפים בחלוקת המנדטים.

3. איזה תרגיל חיסור יש לבצע כדי למצוא את מספר הקולות הכולל שקיבלו המפלגות שעברו את אחוז החסימה?

© כיף עם ג'ף

המודד לחלוקת המנדטים

כעת נחשב מספר חשוב: מספר הקולות הממוצע למנדט אחד, מתוך הקולות שניתנו למפלגות שעברו את אחוז החסימה.

מספר זה נקרא המודד לחלוקת המנדטים.

4. איזה תרגיל יש לבצע כדי לחשב את המודד לחלוקת המנדטים?

בחישוב המודד לוקחים רק את החלק השלם של התוצאה, ללא הספרות שאחרי הנקודה העשרונית.

5. מהו המודד שקיבלתם?

6. ג'ף רצה לחשב את מספר המנדטים שהליכוד זכאית להם בחלוקה הראשונית. הוא רשם בתא C2 את המספר 30.79. איזה תרגיל הוא ביצע?

7. בעמודה D רושמים את מספר המנדטים שכל מפלגה מקבלת בחלוקה הראשונית. לשם כך לוקחים רק את החלק השלם של המספר בעמודה C, ללא הספרות שאחרי הנקודה העשרונית. השלימו את העמודות C ו־D בטבלה מספר 1.

8. בחלוקה הראשונית חולקו 113 מנדטים בלבד. מדוע מספר המנדטים שחולקו קטן מ־120?

בתא E2 חישב ג'ף שלאחר שהליכוד קיבלה 30 מנדטים בחלוקה הראשונית, נותרו לה 28,526 קולות שלא הספיקו לקבלת מנדט נוסף.

9. איזה תרגיל ביצע ג'ף כדי לקבל את המספר 28,526?

10. השלימו את עמודה E בטבלה מספר 1.

© כיף עם ג'ף

11. סכום שאריות הקולות בעמודה E הוא 253,691. זהו מספר הקולות שנותרו לכל המפלגות יחד לאחר החלוקה הראשונית, ושעדיין לא תורגמו למנדטים.

כיצד סכום שאריות הקולות קשור לעובדה שבחלוקה הראשונית חולקו 113 מנדטים בלבד?

12. בחלוקה הראשונית חולקו 113 מנדטים מתוך 120. הציעו שיטה לחלוקת שבעת המנדטים הנותרים בין המפלגות.

חלוקת המנדטים לפי שיטת השאריות הגדולות

עד להנהגת שיטת בדר–עופר בשנת 1973, חלוקת המנדטים העודפים התבססה על שיטת השאריות הגדולות, תוך התחשבות בהסכמי עודפים בין מפלגות. (בחלק ב׳ של הפעילות נדון בשיטת בדר–עופר ובהסכמי עודפים.)

13. נתעלם בשלב זה מהסכמי העודפים ונחלק את שבעת המנדטים הנותרים למפלגות בעלות שאריות הקולות הגדולות ביותר.

א. אילו שבע מפלגות יקבלו מנדט נוסף?

ב. השלימו בעמודה F בטבלה מספר 1 את מספר המנדטים הסופי של כל מפלגה.

ג. בדקו שסכום המנדטים בעמודה F הוא 120.

© כיף עם ג'ף

המתמטיקה שמאחורי תוצאות הבחירות לכנסת בשנת 2022

טבלה מספר 1:

	A	B	C	D	E	F
1	**המפלגה**	**מס' הקולות**	**מספר הקולות חלקי המודד (דיוק של שתי ספרות אחרי הנקודה)**	**מס' המנדטים בחלוקה הראשונית (החלק השלם)**	**שארית הקולות**	**חלוקת המנדטים לפי שיטת השאריות הגדולות**
2	**הליכוד**	1,115,336	30.79	30	28,526	
3	**הציונות הדתית**	516,470				
4	**יש עתיד**	847,435				
5	**המחנה הממלכתי**	432,482				
6	**ש"ס**	392,964				
7	**יהדות התורה**	280,194				
8	**ישראל ביתנו**	213,687				
9	**רע"מ**	194,047				
10	**חד"ש-תע"ל**	178,735				
11	**העבודה**	175,992				
12	**סה"כ**	4,347,342		113	253,691	120

סה"כ הקולות הכשרים: 4,764,742

קולות לרשימות שלא עברו: 417,400

© כיף עם ג'ף

המתמטיקה שמאחורי תוצאות הבחירות לכנסת בשנת 2022 (חלק ב')

בחלק זה של הפעילות נלמד כיצד מחלקים את 120 המנדטים בין המפלגות באמצעות שיטת בדר–עופר, שהונהגה בשנת 1973 ונהוגה בישראל עד היום.

נבחן כיצד השיטה מתחשבת בהסכמי עודפים בין מפלגות, וכיצד מחלקים את המנדטים בין מפלגות שחתמו על הסכמי עודפים לבין מפלגות שלא חתמו על הסכמים כאלה.

הסכמי עודפים

כל מפלגה רשאית לחתום על הסכם עודפים עם מפלגה אחרת. במסגרת ההסכם, שתי המפלגות נחשבות לרשימה אחת לצורך חלוקת המנדטים העודפים, וכך הן עשויות להגדיל את מספר המנדטים שיקבלו יחד.

הסכמי העודפים נחתמים לפני הבחירות. כדי שהסכם עודפים יהיה תקף בחלוקת המנדטים, שתי המפלגות חייבות לעבור את אחוז החסימה.

בטבלה מספר 2 אפשר לראות שש מתוך עשר המפלגות שעברו את אחוז החסימה בבחירות 2022 חתמו על הסכמי עודפים. שלושת זוגות המפלגות היו:

- הליכוד והציונות הדתית
- יש עתיד והמחנה הממלכתית
- ש"ס ויהדות התורה

שאלות למחשבה:

האם ייתכן שמפלגה תקבל יותר מנדטים בזכות הסכם עודפים? האם יש חשיבות לשאלה עם איזו מפלגה היא חותמת על הסכם העודפים?

בטבלה מספר 2, בתא B4, מופיע המספר 673,158. זהו מספר הקולות הכולל שקיבלו ש״ס ויהדות התורה יחד.

1. איזה תרגיל יש לבצע כדי לקבל את המספר המופיע בתא B3 (רמז: היעזרו בטבלה מספר 1)?

© כיף עם ג'ף

בעמודה C בטבלה מספר 2 מחשבים את מספר המנדטים שכל רשימה משותפת או מפלגה מקבלת בחלוקה הראשונית. בדומה לחישוב בטבלה מספר 1, מחלקים את מספר הקולות במודד לחלוקת המנדטים, שהוא 36,227, ולוקחים רק את החלק השלם של התוצאה.

2. השלימו את עמודה C בטבלה מספר 2. האם קיבלתם שבחלוקה הראשונית חולקו בסך הכול 116 מנדטים?

3. בטבלה מספר 2 חולקו 116 מנדטים בחלוקה הראשונית, לעומת 113 מנדטים בטבלה מספר 1. מה הסיבה להבדל?

שיטת בדר–עופר ומודד הרשימה

בשנת 1973 הונהגה שיטה חדשה לחלוקת המנדטים הנותרים, שנקראה על שם שני חברי הכנסת שהציעו אותה: יוחנן בדר ואברהם עופר.

לפי שיטה זו, מחלקים את המנדטים הנותרים בזה אחר זה, עד שמגיעים ל־120 מנדטים בסך הכול.

כדי לקבוע איזו רשימה או מפלגה תקבל את המנדט הבא, מחשבים מספר שנקרא מודד הרשימה.

מודד הרשימה הוא מספר הקולות הממוצע למנדט, אילו הרשימה או המפלגה הייתה מקבלת מנדט אחד נוסף על מספר המנדטים שכבר הוקצו לה.

לדוגמה, לאחר החלוקה הראשונית יש לרשימה המשותפת של הליכוד והציונות הדתית 45 מנדטים. כדי לחשב את מודד הרשימה שלה, נחלק את 1,631,806 הקולות שקיבלו שתי המפלגות יחד ב־46, כלומר במספר המנדטים שיהיו להן אם יקבלו מנדט נוסף.

1,631,806:(45 +1) = 35,474

לכן מודד הרשימה שלהן הוא כ־35,474 קולות למנדט.

© כיף עם ג'ף

הרשימה או המפלגה בעלת מודד הרשימה הגבוה ביותר מקבלת את המנדט הבא. לאחר מכן מחשבים מחדש את מודד הרשימה שלה, וממשיכים כך עד לחלוקת כל 120 המנדטים.

4. השלימו את עמודה D בטבלה מספר 2 והסבירו למה המפלגה חד"ש-תע"ל קיבלה את המנדט ה-117.

5. אילו מפלגות או רשימות קיבלו את המנדט ה-118, ה-119 וה-120?

6. השלימו את עמודות שנותרות בטבלה מספר 2: F, G, H, I, J ו-K.

בחלק ג׳ של הפעילות נלמד כיצד מחלקים את המנדטים שקיבלו הרשימות המשותפות בין שתי המפלגות שחתמו על הסכם עודפים. כך נגיע לחלוקה הסופית של 120 המנדטים בין עשר המפלגות.

© כיף עם ג'ף

חלוקת המפלגות לפי הסכמי העודפים (טבלה מספר 2):

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	המפלגות	מס' הקולות	מספר המנדטים בחלוקה הראשונית (החלק השלם)	מודד הרשימה	המנדט ה-117	מודד הרשימה	המנדט ה-118	מודד הרשימה	המנדט ה-119	מודד הרשימה	המנדט ה-120
2	הליכוד / הציונות הדתית	1,631,806		35,474							
3	יש עתיד/ המחנה הממלכתי	1,279,917									
4	ש"ס / יהדות התורה	673,158									
5	ישראל ביתנו	213,687									
6	רע"מ	194,047									
7	חד"ש-תע"ל	178,735									
8	העבודה	175,992									
9	סה"כ	4,347,342			117		118		119		120

© כיף עם ג'ף

המתמטיקה שמאחורי תוצאות הבחירות לכנסת בשנת 2022 (חלק ג')

חלק ג׳ – חלוקת המנדטים בין מפלגות שחתמו על הסכמי עודפים

בחלק זה של הפעילות נחלק את המנדטים הנוספים שקיבלו הרשימות המשותפות בין המפלגות שחתמו על הסכמי עודפים. כך נגיע לחלוקה הסופית של 120 המנדטים בין עשר המפלגות.

בטבלה מספר 3 נחלק את שני המנדטים הנוספים שקיבלה הרשימה המשותפת של הליכוד והציונות הדתית, לפי שיטת בדר–עופר.

בתא D1 מחשבים את מודד הרשימה של הליכוד, כדי לקבוע איזו משתי המפלגות תקבל את המנדט הנוסף הראשון.

החישוב הוא

1,115,336:(30 + 1) = 35,978

כאשר רשמנו את החלק השלם.

1. חשבו את מודד הרשימה של הציונות הדתית, רשמו בתא D2 את החלק השלם של התוצאה.

2. איזו מפלגה קיבלה את המנדט הנוסף הראשון? השלימו את התאים E1 ו-E2.

3. השלימו את התאים F1, F2, G1 ו-G2 כדי לקבוע איזו מפלגה קיבלה את המנדט הנוסף השני.
   איזו מפלגה קיבלה מנדט זה?

יש עתיד והמחנה הממלכתי מחלקות ביניהן שני מנדטים נוספים. ש״ס ויהדות התורה מחלקות ביניהן מנדט נוסף אחד.

4. השלימו את שאר התאים בטבלה מספר 3 כדי לקבוע כיצד מתחלקים המנדטים הנוספים בין המפלגות שחתמו על הסכמי עודפים.

5. השלימו את עמודה B בטבלה מספר 4. כך נקבל את חלוקת 120 המנדטים הסופית בין המפלגות בבחירות לכנסת בשנת 2022.

© כיף עם ג'ף

6. אילו מפלגות הרוויחו בסופו של דבר מחתימה על הסכם עודפים?

7. האם יש מפלגה שאיבדה מנדט בעקבות חתימה על הסכם עודפים?

8. אילו מסקנות אפשר להסיק מהתוצאות בטבלה מספר 4 על השיטות השונות לחלוקת 120 המנדטים בכנסת?

9. האם לדעתכם קיימת שיטה הוגנת לחלוטין לחלוקת מנדטים ?נמקו.

שאלת רשות 1:

בעמודה E בטלה מספר 4 מופיעות תוצאות חלוקת המנדטים לפי שיטת בדר–עופר ,ללא הסכמי עודפים .בדקו אם התוצאות המופיעות בעמודה זו נכונות.

שאלת רשות 2 – השוואה בין שיטת בדר–עופר לשיטת השאריות הגדולות

נניח ששלוש מפלגות מתמודדות על 10 מנדטים. בסך הכול קיבלו שלוש המפלגות יחד 1,000 קולות, ולכן המודד לחלוקת המנדטים הוא 100 קולות למנדט.

אלה תוצאות הבחירות:

המפלגה	**מספר הקולות**
המפלגה הגדולה	610
המפלגה הבינונית	240
המפלגה הקטנה	150
בסה"כ	**1,000**

א. חלקו את 10 המנדטים לפי שיטת בדר–עופר. איזו מפלגה מקבלת את המנדט העשירי?

ב. חלקו את 10 המנדטים לפי שיטת השאריות הגדולות. איזו מפלגה מקבלת את המנדט העשירי?

© כיף עם ג'ף

ג. השוו בין התוצאות בשתי השיטות. איזו מפלגה מרוויחה משיטת בדר–עופר, ואיזו מפלגה מרוויחה משיטת השאריות הגדולות?

שאלה רשות 3 – פרדוקס אלבמה

פרדוקס אלבמה הוא תופעה מפתיעה בשיטת השאריות הגדולות: כאשר מגדילים את מספר המנדטים לחלוקה, מפלגה מסוימת עלולה דווקא לאבד מנדט, אף שמספר הקולות שקיבלה לא השתנה.

חקרו את התופעה ונסו למצוא דוגמה מספרית שממחישה אותה. (רמז: נסו תחילה למצוא דוגמה עם שלוש מפלגות בלבד.)

© כיף עם ג'ף

מספר המנדטים של מפלגות שחתמו על הסכמי עודפים (טבלה מספר 3):

	A	B	C	D	E	F	G
	המפלגות	**מספר הקולות**	**מספר המנדטים בחלוקה הראשונית (החלק השלם)**	**מודד הרשימה**	**מנדט חדש**	**מודד הרשימה**	**מנדט חדש**
1	**הליכוד**	1,115,336	30	35,978			
2	**הציונות הדתית**	516,470	14				
3							
4	**יש עתיד**	847,435	23				
5	**המחנה הממלכתי**	432,482	11				
6							
7	**ש"ס**	392,964	10				
8	**יהדות התורה**	280,194	7				

© כיף עם ג'ף

טבלה מספר 4

חלוקת המנדטים הסופית

	A	B	C	D	E
1	**המפלגה**	**חלוקת המנדטים הסופית**	מס' המנדטים בחלוקה הראשונית	חלוקת המנדטים לפי שיטת השאריות הגדולות	חלוקת המנדטים לפי שיטת בדר–עופר, ללא הסכמי עודפים*
2	**הליכוד**		30	31	31
3	**הציונות**		14	14	14
4	**יש עתיד**		23	23	24
5	**המחנה הממלכתי**		11	12	12
6	**ש"ס**		10	11	11
7	**יהדות התורה**		7	8	7
8	**ישראל ביתנו**	6	5	6	6
9	**רע"מ**	5	5	5	5
10	**חד"ש-תע"ל**	5	4	5	5
11	**העבודה**	4	4	5	5
12	**סה"כ**	120	113	120	120

*עמודה E נוספה לצורך השוואה.

© כיף עם ג'ף