חקירות בסיס

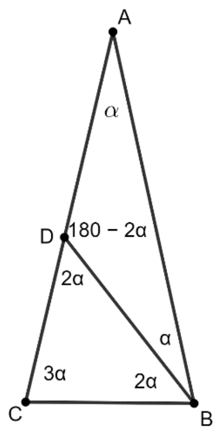
נחקור מה קורה כשמשנתה מי הבסיס במשולש שווה-שוקיים הנמצא בתוך משולש שווה-שוקיים.

1. בשרטוט משולש שווה-שוקיים ABC שבו AB = AC

מיקמו נקודה D בין A ל- C כך ש-

ADB הוא משולש שווה-שוקיים שבסיסו AB וגם

DCB הוא משולש שווה-שוקיים שבסיסו **DB**.



א. מצאו את הזוויות של שלושת המשולשים.

ב- ΔABC,

$$7\alpha = 180$$

$$\alpha = \frac{180°}{7}$$

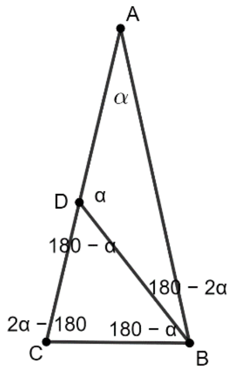
$$\measuredangle ADB = \frac{900°}{7} \qquad \measuredangle CAB = \measuredangle DAB = \frac{180°}{7}$$

$$\measuredangle ACB = \frac{540°}{7} \qquad \measuredangle CDB = \measuredangle CBD = \frac{360°}{7}$$

ב. האם אפשר למצוא זוג משולשים דומים מבין שלושת המשולשים? הסבירו.

לא נוצרים משולשים דומים, כי אין משולשים בעלי זוויות שוות בהתאמה.

ג. האם אפשר למקם את הנקודה D בין A ל- C, כך ש- AD או DB יהיו הבסיס של המשולש ADB? הסבירו.



הצלע DB לא יכולה להיות הבסיס כי הצלעות AD ו- AB לא יכולות להיות שוות. AD חייבת להיות קטנה מ- AB כי AB = AC.

אם הצלע AD הבסיס אז נשווה בין $\measuredangle ACB$ ל- $\measuredangle ABC$:

$$2\alpha - 180 = 180 - \alpha + 180 - 2\alpha$$

$$5\alpha = 540$$

$$\alpha = 108^\circ$$

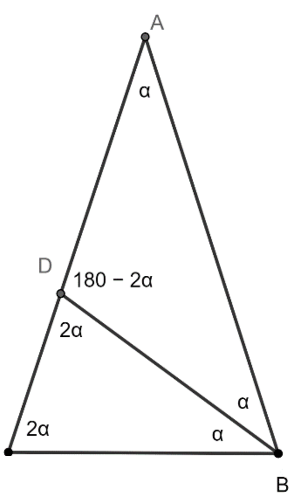
אבל α לא יכולה להיות שווה ל- 108° כי אז סכום הזוויות ב- ΔADC יהיה גדול מ- 180°.

2. נתון משולש שווה-שוקיים ABC שבו AB = AC

מיקמו נקודה D בין A ל- C כך ש-

ADB הוא משולש שווה-שוקיים שבסיסו AB וגם

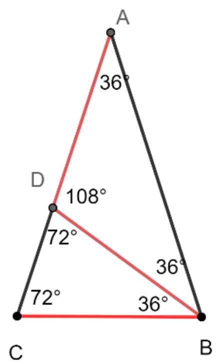
DCB הוא משולש שווה-שוקיים שבסיסו **CD**.



א. שרטטו ציור לפי הנתונים.

ראו שרטוטים.

ב. מצאו את הזוויות של שלושת המשולשים.



$$5\alpha = 180^\circ$$

$$\alpha = 36^\circ$$

$\measuredangle C = \measuredangle CDB = 72^\circ$ $\qquad$ $\measuredangle A = \measuredangle DBC = \measuredangle CBD = 36^\circ$

$$\measuredangle BDA = 108^\circ$$

ג. האם אפשר למצוא זוג משולשים דומים מבין שלושת המשולשים? הסבירו.

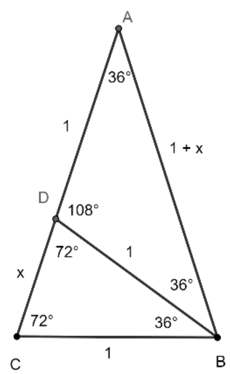
כן, $\Delta BCD \sim \Delta ABC$ לפי ז.ז.

$$\measuredangle BCD = \measuredangle BDC = \measuredangle ABC = 72^\circ$$

ד. נתון ש- $BC = 1$, מצאו את אורך הצלעות AD, DC, ו- AB.

לפי הדמיון:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{CD}$$



נסמן: $CD = x$ ונקבל

$$\frac{1+x}{1} = \frac{1}{x}$$

$$x(1+x) = 1$$

$$x^2 + x - 1 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

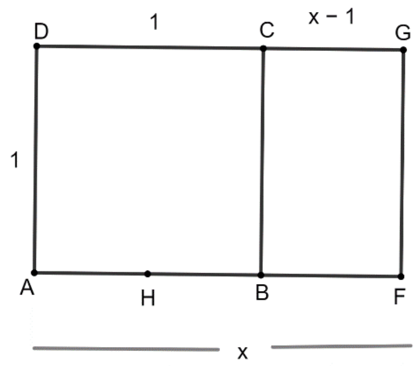
לא יכול להיות שווה ל- $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ כי זה ערך שלילי. לכן x שווה ל- $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

$$AD = 1$$

$$DC = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

$$AB = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

ה. חפשו באינטרנט "יחס הזהב", והסבירו איך זה קשור לתשובותיכם בסעיף הקודם.



אחת ההגדרות של יחס הזהב היא:

יחס הזהב הוא היחס שבין הצלעות המלבן בעל התכונה הבאה:

זהו מלבן (ADGF) שאם חותכים ממנו ריבוע (DCBA) נוצר מלבן (BCGF) הדומה למלבן המקורי.

אחת הדרכים למציאת הערך של יחס הזהב היא לסמן ש- AD = 1 ו- AF = x ולפי היחס בין המלבנים:

$$\frac{AF}{AD} = \frac{FG}{CG}$$

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1}$$

$$x(x-1) = 1 \cdot 1$$

$$x^2 - x - x = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

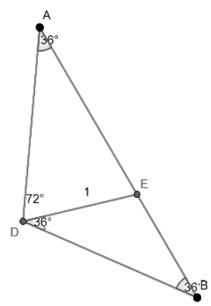
x לא יכול להיות שווה ל- $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ כי זה ערך שלישי.

(הערה: בשרטוט למעלה HC = HF)

בסעיף הקודם היחס במשולש ABC בין הצלעות AB ל- BC הוא גם "יחס הזהב".

3. האם לדעתכם אפשר לשרטט משולש שווה-שוקיים ABC שבו AB=AC.
הנקודה D נמצאת בין A ל- C כך ש-
ADB הוא משולש שווה-שוקיים שבסיסו AB וגם
DCB הוא משולש שווה-שוקיים שבסיסו **BC**? הסבירו.

לא. לפי הנתונים AD = CD = DB ולכן BD הוא תיכון לצלע AC במשולש ABC כאשר AD = CD.
כתוצאה מכך, $\measuredangle CBA = 90°$ לפי המשפט: אם במשולש התיכון לאחת הצלעות שווה למחצית הצלע שאותה הוא חוצה אז המשולש הוא ישר-זווית.
אבל לא יכול להיות שגם $\measuredangle C = 90°$ כי אז יש שתי זוויות ישרות במשולש.



4. נתון בשרטוט בצד שמאל ש-: $\measuredangle A = \measuredangle B = \measuredangle EDB = 36°$
$\measuredangle ADE = 72°$, DE = 1, DB = x.
א. הוכיחו ש- $\triangle ADB \sim \triangle BED$.
ב. הוכיחו שבמשולש EDB שזוויותיו הן 36°, 36° ו- 108°, היחס בין BD ל- EB הוא יחס הזהב - $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
(הדרכה: סמנו DB = x)

א.
$\measuredangle A = \measuredangle B = \measuredangle EDB = 36°$
$\measuredangle ADB = \measuredangle DEB = 108°$
$\triangle ADB \sim \triangle BED$ לפי ז.ז.

ב. לפי הדמיון:

$$\frac{AB}{BE} = \frac{DB}{ED} = \frac{AB}{BD}$$

$$\frac{x}{1} = \frac{x+1}{x}$$

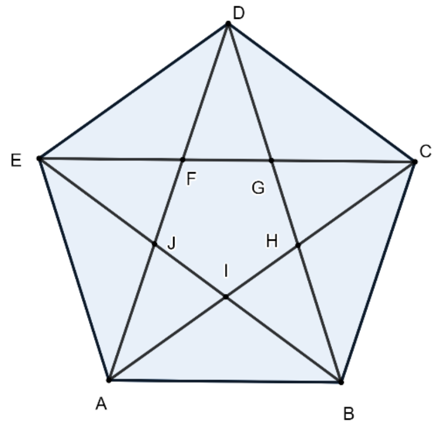
$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

x לא יכול להיות שווה ל- $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ כי זה ערך שלישי.

5. בציור שמשמאל, משורטט מחומש משוכלל ABCDE .
האלכסוני המחומש נחתכים בנקודות
F, G, H, I ו- J.



א. כמה משולשים בגדלים שונים יש במחומש זה?
רשמו את גודל הזוויות של המשולשים שבאותה קבוצה.
ראו את הטבלה בסעיף ב'.

ב. מצאו כמה משולשים יש בסך-הכול במשולש.
יש 35 משולשים המתחלקים לפי גודל הזויות וחפיפה ל-5 קבוצות:
3 קבוצות של 5 משולשים חופפים זה לזה,
ושתי קבוצה של 10 משולשים חופפים זה לזה.

גדלים	קהה-זווית גדול	קהה-זווית קטן	חד-זווית גדול	חד-זווית בינוני	חד-זווית קטן
זוויות	36°, 36°, 108°	36°, 36°, 108°	36°, 72°, 72°	36°, 72°, 72°	36°, 72°, 72°
	ΔDEC	ΔEAJ	ΔDAB	ΔEDG	ΔDFG
	ΔDEA	ΔAIB	ΔCEA	ΔEDJ	ΔCFH
	ΔEAB	ΔBHC	ΔBED	ΔDCF	ΔBIH
	ΔABC	ΔCGD	ΔADC	ΔDCH	ΔAIJ
	ΔBCD	ΔDFE	ΔEBC	ΔCBG	ΔEFJ
	ΔFAC			ΔCBI	
	ΔGEB			ΔABH	
	ΔHAD			ΔABJ	
	ΔICE			ΔEAF	
	ΔJBD			ΔEAI	

ג. מהם יחסי הדמיון בין זוגות של משולשים שהם חדי-זווית ובגדלים שונים?
מהו יחס הדמיון בין זוג משולשים קהי-זווית ובגדלים שונים?

נסמן ש- FG = 1, אז $DG = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ו- $DC = (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

יחס הדמיון בין זוגות של משולשים שהם חדי-זווית ובגדלים שונים $1:\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

כלומר היחס הדמיון בין ΔDFG ל- ΔEDG הוא $1:\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

ויחס דמיון בין ΔEDG ל- ΔDAB הוא $1:\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

יחס הדמיון בין המשולשים שהם קהה-זווית הוא $1:\frac{1+\sqrt{5}}{2}$