

## סדרת הפרשים

1. נתונים חמשת המספרים הראשונים של סדרת הפרשים:

$$2, 5, 3, -2, -5, \dots$$

א. מה המספר הבא של הסדרה? מה חוקיות הסדרה?

פתרון:

המספר הבא הסדרה הוא  $-3$  כי  $-3 = (-2) - 5$ . החוקיות של הסדרה היא שכל מספר בסדרה (מהמספר השלישי ואילך) הוא ההפרש שבין המספר הקודם לו ובין המספר הקודם לקודם בסדרה.

ב. כתבו את 13 המספרים הראשונים של הסדרה הזאת.

פתרון:

$$2, 5, 3, -2, -5, -3, 2, 5, 3, -2, -5, -3, 2$$

ג. תארו מה התכונות של הסדרה הזאת?

פתרון:

לסדרה הזאת מחזוריות של 6 מספרים שחוזרים על עצמם. ששת המספרים הם  $2, 5, 3, -2, -5, -3$ .  
כמו כן, המספרים הבאים לאחר שלושת המספרים הראשונים במחזור הם המספרים הנגדיים לשלושת המספרים האלה.  
בנוסף, סכום כל שישה מספרים של מחזור אחד הוא אפס.

ד. מצאו את המספר ה-400 בסדרה הזאת.

פתרון:  $-2$

המספרים יוצרים 66 ( $400:6 =$ ) מחזורים שלמים של 6 מספרים. המספר ה-400 בסדרה הוא המספר הרביעי במחזור ה-67 – כלומר,  $-2$ .

ה. מצאו את הסכום של 400 האיברים ראשונים בסדרה הזאת. הסבירו.  
פתרון:

התשובה 8

400 המספרים יוצרים 66 (  $400:6 =$  ) מחזורים שלמים של 6 מספרים שסכומם אפס, אילו הסכום של 4 המספרים האחרונים הוא 8.

2. בחרו שני מספרים ראשונים אחרים של סדרת הפרשים.

א. כתבו את 13 המספרים הראשונים של סדרת ההפרשים שבחרתם.  
פתרון:

למשל, אם נבחר 1 ו-4 כשני המספרים הראשונים, נקבל את הסדרה  
1, 4, 3, -1, -4, -3, 1, 4, 3, -1, -4, -3, 1

ב. תארו מה התכונות של הסדרה הזאת?  
פתרון:

בדומה לסדרה הקודמת, גם לסדרה הזאת מחזוריות של שישה מספרים.  
דוגמאות לתכונות:

- שלושת המספרים האחרונים במחזור הם נגדיים לשלושת המספרים הראשונים  
- סכום כל ששת המספרים שבמחזור הוא אפס.

ג. מצאו את המספר ה-400 בסדרה הזאת.  
פתרון:

בדומה לסדרה הקודמת, המספר ה-400 בסדרה הוא המספר הרביעי במחזור.

ד. מצאו את הסכום של 400 האיברים ראשונים בסדרה הזאת. הסבירו.  
פתרון:

סכום כל מחזור שלם הוא אפס, ולכן סכום ארבעת המספרים הראשונים במחזור ה-67 הוא גם סכום 400 האיברים הראשונים של הסדרה.

3. גבי טען כי לכל סדרות הפרשים יש את התכונות האלה. האם הוא צודק? הוכיחו את טענתכם.

פתרון:

גבי צודק. לכל סדרת הפרשים יש מחזוריות של 6 מספרים, וסכום של ששת המספרים הוא אפס. אפשר להוכיח את שתי הטענות האלה בעזרת אלגברה:

אם נסמן את המספר הראשון בסדרה ב- $x$  ואת המספר השני ב- $y$ , הביטויים שמייצגים את ששת המספרים הראשונים של הסדרה הם

$$x, y, y - x, -x, -y, x - y, x, y, \dots$$

וסכומם יהיה

$$x + y + (y - x) + (-x) + (-y) + (x - y) = 0$$

בנוסף, אפשר לראות כי השלושה הראשונה והשלושה השנייה במחזור מורכבות מביטויים נגדיים זה לזה.

4. א. מצאו שלוש דוגמאות לסדרות הפרשים שבהן סכום 5 המספרים הראשונים הוא 11.

פתרון:

בסעיף הקודם ראינו כי הסכום של חמשת המספרים הראשונים בסידרת הפרשים שמתחילה

$$\text{ב-} x \text{ וב-} y \text{ הוא } y - x.$$

לכן, כדי שסכום חמשת המספרים הראשונים יהיה 11, צריך להתקיים

$$y - x = 11 \text{ או } y = x + 11.$$

כלומר, בסדרה כזאת, המספר השני חייב להיות גדול ב-11 מן המספר הראשון.

דוגמה לסדרה יכולה להיות

$$2, 13, 11, -2, -13, -11, \dots$$

אבל יש אינסוף אפשרויות.

ב. מהו סכום 83 המספרים הראשונים בכל אחת משלוש הסדרות שמצאתם? תארו את

השיקולים שלכם.

פתרון:

מכיוון שסכום 83 המספרים הראשונים שווה לסכום חמשת המספרים הראשונים בסדרה,

התנאי לסכום 11 עבור 83 מספרים בסדרה זהה לתנאי שמצאנו בסעיף הקודם לגבי סכום

11 עבור חמשת המספרים הראשונים.

5. כתבו פעילות דומה על סדרת הפרשים שמתחילה עם שני מספרים זהים (שאינם 0), ותנו לאחד החברים שלכם לפתור אותה.

פתרון:

בדומה לסדרות הפרשים המתחילות בשני מספרים שונים, גם לסדרות האלה מחזוריות של 6 מספרים וסכום המספרים שבמחזור אפס.

אפשר לייצג את הסדרות באופן אלגברי

$$x, x, 0, -x, -x, 0, x, x, \dots$$

ולמצוא תכונות נוספות של הסדרות שמסוג זה.

למשל:

- המספר השלישי והשישי במחזור תמיד אפס

- סכום שלושת המספרים האחרונים במחזור נגדי לסכום שלושת הראשונים.